Energia i pęd w teorii względności

<u>Oznaczenia:</u>

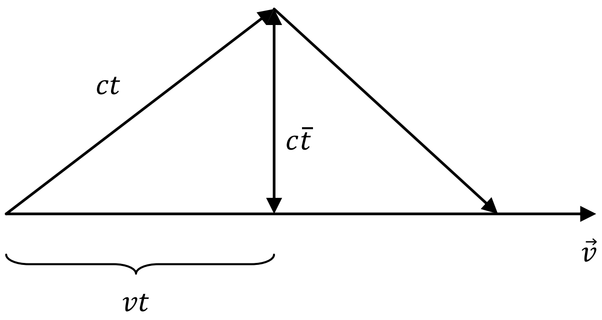
Niech dane będą dwa układy odniesienia Q i W; układ Q porusza się względem W.

$\bar{q}$ –wielkość fizyczna q obserwowana wewnątrz układu Q

q – wielkość fizyczna q obserwowana z układu W

<u>Dylatacja czasu.</u>

Zamieszczony poniżej rysunek przedstawia tzw. zegar świetlny. Jeden cykl obejmuje wysłanie sygnału świetlnego i jego powrót do odbiornika. Droga jaką pokonuje promień obserwowana z układu W jest trójkątem równoramiennym o boku długości ct gdzie t to połowa czasu trwania jednego cyklu. Wewnątrz układu Q poruszającego się z prędkością v ta sama ścieżka jest linią prostą. Jeżeli c ma pozostawać stałe, to czas musi zachowywać się odmiennie w tych dwu układach. Zależność pomiędzy czasami uzyskać można stosując twierdzenie Pitagorasa.



$$(ct)^2 = (c\bar{t})^2 + (vt)^2$$

po niewielkich przekształceniach otrzymujemy

$$t = \frac{\bar{t}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \bar{t}\gamma$$

czynnik γ nosi nazwę czynnika Lorentza.

<u>Pęd relatywistyczny.</u>

$$p = m\frac{dx}{d\bar{t}} = m\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\bar{t}} = mv\gamma$$

<u>Energia.</u>

$$\Delta E_k = W = \int_{x,pocz}^{x,końc} F\,dx$$

Załóżmy, że energia kinetyczna początkowa równa była zero. Wówczas otrzymujemy

$$E_k = \int v\, d(mv) = \int v\, d(mv\gamma)$$

Wykorzystując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$E_k = mv^2\gamma - m\int \frac{v\, dv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Oznaczając całkę występującą w równaniu przez K i stosując podstawienie $u = v^2$ otrzymujemy

$$K = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-\frac{u}{c^2}}}$$

Kolejnym podstawieniem będzie $w = \sqrt{1-u/c^2}$, stąd $u = -c^2(w+1)(w-1)$ oraz

$du = -2c^2 w\, dw$. Zatem

$$K = \frac{1}{2}\int \frac{-2c^2 w\, dw}{w} = -c^2\int dw = -c^2 w + C$$

$$\therefore K = -c^2\sqrt{1-\frac{u}{c^2}} + C$$

$$\therefore K = -c^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} + C$$

Stała całkowania równa jest energii spoczynkowej E_0. Energię kinetyczną można zapisać jako

$$E_k = mc^2\gamma - E_0$$

Zauważając, że gdy $v = 0$ wówczas $\gamma = 1$ i $E_k = 0$ otrzymujemy wartość energii spoczynkowej i kinetycznej

$$E_0 = mc^2$$

$$E_k = mc^2(\gamma - 1)$$

Zależność między pędem a energią fizyka nierelatywistyczna wyraża równością

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

Podobny związek otrzymać można z przekształcenia równań relatywistycznych na energię kinetyczną i pęd (wyeliminować w tym celu należy prędkość). Otrzymujemy

$$(pc)^2 = E_k^2 + 2E_k mc^2$$

Stosując zależność między energią całkowitą $mc^2\gamma$ (oznaczaną E) a energią kinetyczną i spoczynkową dostajemy następującą równość

$$E^2 = (pc)^2 + m^2c^4.$$

Autor:

A. Balaziński