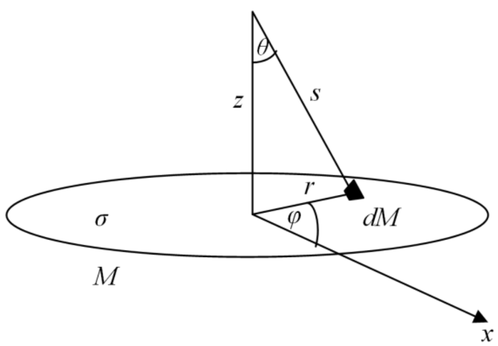
FIZYKA PŁASKIEJ ZIEMI

Jak wyglądałaby nasza rzeczywistość gdyby Ziemia, zamiast kulą, była „(nie)skończonym naleśnikiem”? Analiza wyników otrzymanych przy tym założeniu prowadzi do ciekawych wniosków, tłumaczących sens obecnie przyjmowanych założeń w nauczaniu początkowym fizyki.



Na rysunku obok pokazany mamy „dysk Ziemi” o póki co nieokreślonym promieniu, gęstości powierzchniowej σ i masie całkowitej M. Korzystać będziemy z biegunowego układu współrzędnych. Wiemy, że:

$$dM = \sigma dS = \sigma r dr d\varphi$$

Na ciało o masie m w punkcie oddalonym o s od dM działa siła dF. Szczególnie interesuje nas składowa tej siły wzdłuż osi z – wszystkie pozostałe składowe nie wnoszą nic do wyniku, co widać z symetrii układu. Rozważmy zatem dF_z:

$$dF_z = dF\cos\theta = G\frac{dMm}{s^2}\frac{z}{s} = Gmz\frac{\sigma r dr d\varphi}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$F_z = Gmz\sigma\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{r dr d\varphi}{(z^2+r^2)^{3/2}} = 2\pi Gmz\sigma\int_0^R\frac{r dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

Wygodnie zastosować w tym miejscu podstawienie $t = z^2 + r^2 \ \rightarrow dr = dt/2r$. Wówczas otrzymamy:

$$\int\frac{r}{t^{3/2}}\frac{dt}{2r} = \frac{1}{2}\int t^{-3/2}\,dt = \frac{-1}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Wracając do F_z

$$F_z = 2\pi Gmz\sigma\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\Bigg|_R^0 = 2\pi Gmz\sigma\left(\frac{1}{|z|}-\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

Zakładamy, że $z \geq 0$, czyli $|z| = z$

$$F_z = 2\pi Gm\sigma\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

W podobnych problemach wygodnie mówić nie o sile, ale o natężeniu pola grawitacyjnego zdefiniowanemu jako siła na jednostkę masy. Dzięki temu wynik obliczeń staje się niezależny od masy. Zauważmy w tym miejscu, że natężenie pola, czyli iloraz siły przez masę jest, w myśl II zasady dynamiki Newtona, przyspieszeniem jakie otrzymuje ciało (jeśli siła grawitacji jest jedyną siłą na nie działającą). Takie *przyspieszenie grawitacyjne* oznaczamy literą *g*. Wprowadźmy też wersor $\hat{\boldsymbol{k}}$ (wektor o module równym jedności i kierunku dodatniej osi *z*) co pozwoli nam zapisać równanie w postaci wektorowej.

$$\boldsymbol{g} = -2\pi G\sigma\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

Co dzieje się jeśli $R \to \infty$? Roboczo przepiszmy równanie do w postaci

$$\boldsymbol{g} = -2\pi G\sigma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left({}^{R}\!/_{z}\right)^2}}\right)\widehat{\boldsymbol{k}}$$

Tutaj od razu widzimy, że przy $R \to \infty$, $\boldsymbol{g} \to -2\pi Gm\sigma\widehat{\boldsymbol{k}}$ (oraz $g \to 0$ przy $z \to 0$). Jest to bardzo istotny wniosek. Okazuje się bowiem, że w przypadku nieskończonej płaszczyzny wektor $\boldsymbol{g}$ nie zależy od wysokości nad płaszczyzną i w każdym punkcie półprzestrzeni nad płaszczyzną, tzn. $z \geq 0$ wynosi

$$\boldsymbol{g} = -2\pi G\sigma\widehat{\boldsymbol{k}}$$

Zatem jasne staje się założenie tak często stosowane w podręcznikach fizyki używanych w jej początkowym nauczaniu, że $\boldsymbol{g}$ nisko nad ziemią jest stale – wówczas powierzchnię planety traktować można jako nieskończoną i płaską.

Jak inaczej uzyskać ten sam wynik? Okazuje się, że w przypadku grawitacji istnieje prawo Gaussa analogiczne do tego występującego przy opisie pola elektrycznego. Przedstawia się je w postaci:

$$\oint \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{S} = -4\pi GM$$

Zastosujmy je w omawianym przypadku. W tym celu przetniemy naszą nieoskoczoną płaszczyznę „pudełkiem" o górnej i dolnej ściance o powierzchni ΔS równoległych do płaszczyzny. Z iloczynu skalarnego w prawie Gaussa wynika, że jedynie te dwie ścianki będą miały wkład do całki, bowiem przyjmujemy, że pozostałe cztery są prostopadłe do płaszczyzny i cosinus ukryty w iloczynie skalarnym równy jest zero. Korzystając z tej obserwacji całkę zapiszemy jako:

$$\int_{\text{dół}} \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\text{góra}} \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{S} = -g\Delta S - g\Delta S$$

… a całe prawo Gaussa jako:

$$-2g\Delta S = -4\pi GM$$

$$g = 2\pi G\sigma$$

lub w postaci wektorowej:

$$\boldsymbol{g} = -2\pi G\sigma\widehat{\boldsymbol{k}}$$

Kończąc tą część naszych rozważań, obliczymy jeszcze dla satysfakcji gęstość powierzchniową, jeśli g miałoby wynosić na płaskiej ziemi tyle co obecnie czyli $9.8\ \mathrm{m/s^2}$. $\sigma = \frac{g}{2\pi G} = 2.34 \times 10^{10}\ \mathrm{kg/m^2}$. Całkiem sporo!

Nie omówiliśmy jeszcze jednej istotnej kwestii, a mianowicie jak zachowuje się energia potencjalna przy takich założeniach. Oszczędzając czas i miejsce na dowód, energię potencjalną na jednostkę masy w punkcie $\boldsymbol{a}$ i siłę łączy zależność

$$V(a) = \int_a^\Psi \left(\boldsymbol{g} \cdot \hat{\boldsymbol{k}}\right) dz$$ [1]

Gdzie Ψ oznacza punkt odniesienia zdefiniowany następująco: $V(\Psi) = 0$. Dla przykładu: jeśli rozważamy ciało kuliste o masie M to $V(a) = GM\left(\frac{1}{\Psi} - \frac{1}{a}\right)$. Przeważnie przyjmujemy $\Psi = \infty$, ale nie zawsze przynosi to dobre rezultaty – punktu odniesienia w nieskończoności nie możemy niestety przyjąć dla naszej płaskiej ziemi.

$$V(a) = -2\pi G\sigma \int_a^\Psi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) dz = -2\pi G\sigma\left(\Psi - \mathrm{a} + \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{a}^2} - \sqrt{\mathrm{R}^2 + \Psi^2}\right) =$$
$$= 2\pi G\sigma\left(-\Psi + \mathrm{a} - \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{a}^2} + \sqrt{\mathrm{R}^2 + \Psi^2}\right)$$

Tutaj najlepiej będzie przyjąć $\Psi = 0$; wówczas $\boxed{V(a) = 2\pi G\sigma\left(\mathrm{a} + \mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{a}^2}\right)}$. Dziwić może swoboda z jaką wybieramy Ψ. Nie ma tu jednak niczego niepoprawnego; prawa fizyki są przecież niezmienne bez względu na to jakich umów używamy. Co więcej w przypadku potencjałów grawitacyjnych jakimi tutaj operujemy ważne są jedynie różnice między nimi – potencjał jako taki ciężko nawet zinterpretować. Dla przykładu: dla masy o rozkładzie kulistym słuszne jest, już wcześniej wspomniane $V(a) = GM\left(\frac{1}{\Psi} - \frac{1}{a}\right)$. Spróbujmy obliczyć prędkość ucieczki v_u, tj. prędkość jaką należy ciału m nadać aby uwolniło się od oddziaływania grawitacyjnego z ciałem M. Wiemy, że grawitacja posiada nieskończony zasięg zatem chcemy po prostu, aby ciało o masie m zatrzymało się w nieskończoności; energia jest zachowana.

$$E_{pocz} = E_{końc}$$

$$GMm\left(\frac{1}{\Psi} - \frac{1}{a_{pocz}}\right) + \frac{1}{2}mv_u^2 = GMm \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{\Psi} - \frac{1}{a}\right)$$

Po drobnych przekształceniach:

$$GM\left(\frac{1}{\Psi} - \frac{1}{\Psi}\right) + \frac{GM}{a_{pocz}} = \frac{1}{2}v_u^2$$

$$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{a_{pocz}}}$$

Jak zatem widać v nie zależy od Ψ. Pod a_{pocz} powinniśmy podstawić promień planety.

---

[1] Jest to szczególna postać bardziej ogólnego $V(a) = \int_a^\Psi \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{l}$, gdzie $d\boldsymbol{l} = dx\hat{\boldsymbol{\imath}} + dy\hat{\boldsymbol{\jmath}} + dz\hat{\boldsymbol{k}}$, ale i tak w tym przypadku całka nie zależy oczywiście od drogi całkowania, więc wybrałem najprostszą możliwą; $\hat{\boldsymbol{\imath}} = 1 \quad 0 \quad 0$, etc.

Spróbujmy obliczyć v_u dla naszej płaskiej Ziemi, korzystając znowu z zasady zachowania energii.

$$E_{pocz} = \frac{1}{2} m v_u^2 + 2\pi G\sigma m \left(-\Psi + a_{pocz} - \sqrt{\mathrm{R}^2 + a_{pocz}{}^2} + \sqrt{\mathrm{R}^2 + \Psi^2} \right) \Big|_{\Psi=0}$$
$$= \frac{1}{2} m v_u^2 + 2\pi G\sigma m \left(a_{pocz} + \mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 + a_{pocz}{}^2} \right)$$

$$E_{końc} = 2\pi G\sigma m \lim_{a\to\infty} \left(\mathrm{a} + \mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{a}^2} \right) = 2\pi G\sigma m \left[\lim_{a\to\infty} R + \lim_{a\to\infty} \left(a - \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{a}^2} \right) \right]$$

Jedynym tutaj problemem może być obliczenie $\lim_{a\to\infty} \left(a - \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{a}^2} \right)$. Najlepiej będzie to zrobić przekształcając do postaci

$$\lim_{a\to\infty} \left[\frac{\left(a - \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{a}^2} \right)\left(a + \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{a}^2} \right)}{\left(a + \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{a}^2} \right)} \right] = \lim_{a\to\infty} \left(\frac{-R^2}{a + \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{a}^2}} \right) = 0$$

Zatem $E_{końc} = 2\pi G\sigma m R$. Z $E_{pocz} = E_{końc}$ po drobnych przekształceniach otrzymujemy

$$v_u^2 = 4\pi G\sigma \left(\sqrt{\mathrm{R}^2 + a_{pocz}{}^2} - a_{pocz} \right)$$

W tym przypadku pod a_{pocz} należałoby podstawić zero, aby zachować fizyczny sens prędkości ucieczki. Wówczas $\boxed{v_u = 2\sqrt{\pi G\sigma R}}$. Stąd można iść dalej i policzyć np. ile musiałaby wynosić gęstość powierzchniowa przy ustalonym *R* (lub na odwrót) aby nasz „komiczny placek" stał się czarną dziurą.

$$\sigma_{\max} = \frac{c^2}{4\pi G R}$$

$$R_{\max} = \frac{c^2}{4\pi G \sigma}$$

A. Bałaziński

2019/04/09