Liczby zespolone

Aleksy Bałaziński

lipiec 2019

1 Podstawy

Liczbą zespoloną nazywać będziemy liczbę postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, natomiast i to tak zwana jednostka urojona, zdefiniowana, tak aby $i^2 = -1$. Część rzeczywistą liczby zespolonej oznaczać będziemy jako $\mathrm{Re}(z)$ (w tym przypadku $\mathrm{Re}(z) = a$), a część urojoną jako $\mathrm{Im}(z)$ (u nas $\mathrm{Im}(z) = b$). Liczbę sprzężoną do z ozaczać będziemy przez $z^\star$. Jedyną różnicą pomiędzy liczbą z a jej sprzężeniem jest znak poprzedzający część urojoną liczby. Dlatego też

$$z^\star = a - ib$$

Moduł liczby zespolonej oznaczany przez $|z|$ zdefiniowany jest jako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = zz^\star$. Geometrycznie liczbę tę interpretujemy jako odległość liczby zespolonej od środka płaszczyzny zespolonej.

2 Transformata Laplace'a

Transformacją Laplace'a $\mathcal{L}$ funkcji $f(t)$ nazywamy nastpęujące działanie

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Jak widać w rezultacie otrzymujemy nową funkcję zmiennej s, zwaną transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$.

3 Funkcja gamma

Mając podstawy w postaci znajomości liczb zespolonych i transformaty Laplace'a zajmiemy się teraz następującym problemem: uogólnieniem pojęcia silni na zbiór liczb zespolonych. Zgodnie ze wzorem Taylora

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n f(0)}{dt^n},$$

Możemy zapisać funkcję $f(t) = e^{at}$ jako

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!},$$

gdzie a jest stałą oraz $a \in \mathbb{R}$. Biorąc transforamtę Laplace'a z obu stron równania otrzymujemy:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \mathcal{L}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!} \right\}.$$

Lewą stronę przekształcamy zgodnie z definicją,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt.$$

Zakładając, że $a - s < 0$, co jest warunkiem zbieżności całki otrzymujemy

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - \frac{a}{s}}.$$

Czyniąc kolejne założenie $a, s > 0$ otrzymujemy na mocy wcześniejszych założeń $|a| < |s|$, a to pozwala na potraktowanie ułamka $1/(1 - a/s)$ jako sumy szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s} \right)^n.$$

Stąd lewą stronę równania zapiszemy jako

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{s^{n+1}}.$$

Przejdźmy teraz do strony prawej,

$$\mathcal{L}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \mathcal{L}\{t^n\}.$$

Zatem całe równanie ma teraz postać (po rozpisaniu $\mathcal{L}\{t^n\}$ z definicji)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{s^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt.$$

ponieważ $a \neq 0$ możemy podzielić obie strony równania przez a^n. Zauważmy, że powyższe sumy będą sobie równe tylko gdy ich składniki są sobie równe, zatem stwierdzamy, że

$$\frac{1}{s^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt.$$

Stosując podstawinie $x = st \implies dx = sdt$ i mnożąc obie strony równości przez s^{n+1}, otrzymujemy

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

Funkcja gamma określona jest tak, że $\Gamma(n+1) = n!$, zatem

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx.$$

To pozwala policzyć silnię dowolnej liczby zespolnej z:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, z! = \int_0^\infty x^z e^{-x} dx$$