OPÓR AERODYNAMICZNY

Dla małych prędkości siła oporu aerodynamicznego proporcjonalna jest do szybkości ciała poruszającego się w płynie, zatem ruch spadającego ciała przy wspomnianych założeniach przedstawia równanie $m\ddot{y} = -b\dot{y} + mg$, gdzie b jest współczynnikiem proporcjonalności siły oporu do szybkości, zależnym od geometrii ciała i charakterystyki ośrodka. Z równania łatwo otrzymujemy $\dot{y}$, stosując podstawienie $\dot{y} = v$:

$$\int_o^v \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = \int_0^t dt$$

Wygodnie jest zdefiniować sobie $\beta = \frac{b}{m}$ (a następnie $u = g - \beta v$). Rozwiązaniem równania jest

$$v(t) = \dot{y}(t) = \frac{g}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

Jak nietrudno zauważyć dla $t \to \infty$, $\dot{y} \to \frac{g}{\beta}$. Tę stałą nazywamy prędkością graniczną, bowiem po pewnym czasie (w warunkach rzeczywistych znacznie krótszym niż nieskończoność) ruch ciała odbywa się ze stałą prędkością.

Dla znacznych prędkości, okazuje się, że siła oporu proporcjonalna jest do gęstości ośrodka ρ, pola przekroju poprzecznego S i kwadratu prędkości. Zatem $F_D \sim \rho v^2 S$. Jak pokazuje doświadczenie:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 S$$

Gdzie stała C_D to tzw. współczynnik siły oporu. Poprzednio znaleźliśmy przybliżony wzór na prędkość w spadku z siłą oporu. Teraz spróbujemy znaleźć zależność bliższą prawdzie.

Niech $K = \frac{1}{2} C_D \rho S$, oraz $\alpha = \frac{K}{m}$. Równanie ruchu: $m\ddot{y} = mg - K\dot{y}^2$. Po zastosowaniu podstawienia $\dot{y} = v$: $dv = (g - \alpha v^2)dt$. Zatem musimy rozwiązać

$$(*) \int_o^v \frac{dv}{g - \alpha v^2} = \int_0^t dt$$

Zajmijmy się najpierw lewą stroną.

$$\int \frac{dv}{g - \alpha v^2} = \int \frac{dv}{\left(\sqrt{g} - \sqrt{\alpha} v\right)\left(\sqrt{g} + \sqrt{\alpha} v\right)} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\int \frac{dv}{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha} v} + \int \frac{dv}{\sqrt{g} - \sqrt{\alpha} v}\right)$$

Wpierw rozwiążmy pierwszą całkę w nawiasie, w tym celu podstawmy $u = \sqrt{g} + \sqrt{\alpha} v$.

$$\int \frac{dv}{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha} v} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln\left(\sqrt{g} + \sqrt{\alpha} v\right)$$

Przypominamy sobie o granicach całkowania (od 0 do v), więc

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{g}+\sqrt{\alpha}v} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left(\sqrt{g}+\sqrt{\alpha}v\right)\Big|_0^v = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\alpha}v}{\sqrt{g}}$$

Podobnie rozwiązujemy drugą, otrzymując $\frac{-1}{\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{g}-\sqrt{\alpha}v}{\sqrt{g}}$. Zatem cała prawa strona jest równa

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\alpha}v}{\sqrt{g}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{g}-\sqrt{\alpha}v}{\sqrt{g}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha g}}\ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{\alpha}v}{\sqrt{g}-\sqrt{\alpha}v}$$

Zaraz, zaraz! Wyrażenie to łudząco przypomina definicję funkcji $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. Skorzystajmy z tego faktu, przepisując nasz wynik w postaci

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha g}} 2\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{\alpha}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{\alpha}{g}}v} = \frac{1}{\sqrt{\alpha g}}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{g}}v\right)$$

Wracając do oryginalnego równania $(*)$

$$\sqrt{\alpha g}t = \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{g}}v\right)$$

(oczywiście prawa strona równania to po prostu t). Stąd, licząc tangens hiperboliczny z obu stron równania otrzymujemy w końcu:

$$v(t) = \dot{y}(t) = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\alpha g}t\right)$$

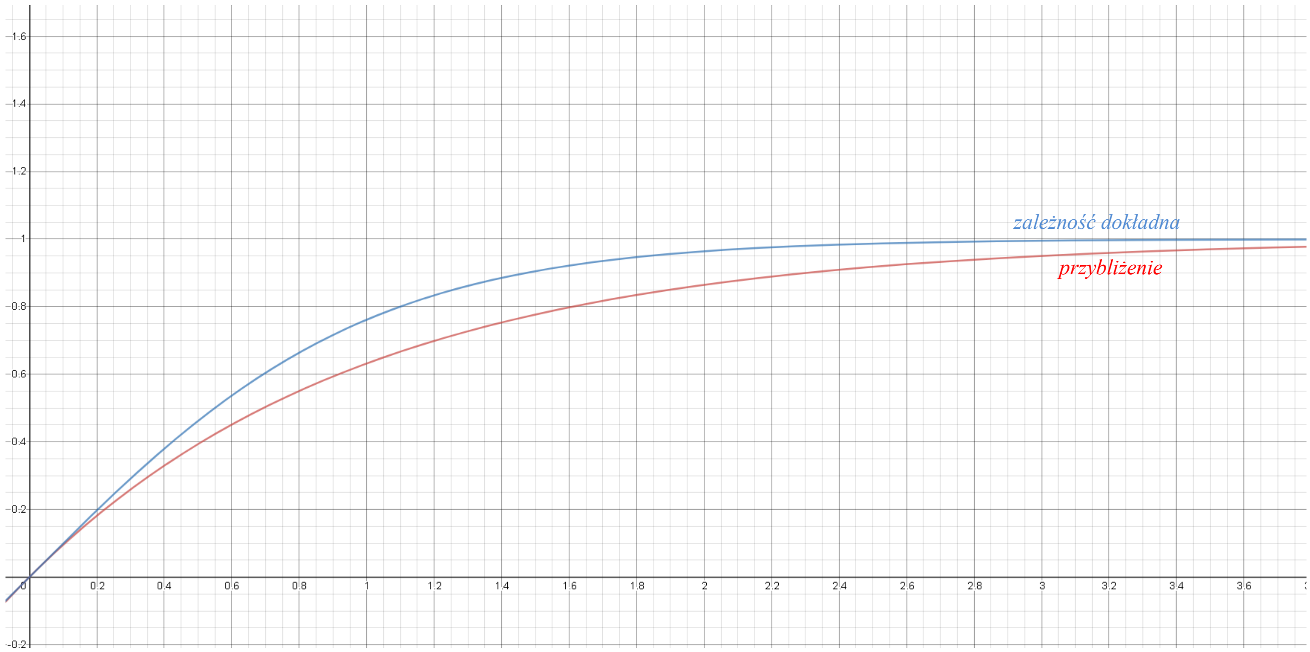
<u>Porównanie</u>. Wypiszmy obok siebie oba wzory (przybliżony i dokładny) dla lepszego wglądu.

$$\dot{y}(t) = \frac{g}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right) \text{ – wzór przybliżony, } \beta = \frac{b}{m}$$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\alpha g}t\right) \text{ – wzór dokładny, } \alpha = \frac{K}{m} = \frac{C_D\rho S}{2m}$$

Obie zależności są wręcz do siebie bliźniaczo podobne, co tyczy się przede wszystkim charakteru stałych α i β, które w obu przypadkach są ilorazami wielkości odpowiadających cechom geometrycznym ciała i charakterystyce ośrodka do jego masy. Również charakter obu ruchów jest podobny. Przy $t \to \infty$, $\dot{y}(t) \to \frac{g}{\beta}$, a w dokładniejszym wzorze $\dot{y}(t) \to \sqrt{\frac{g}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_D S}}$.

Wykresy obu funkcji $\dot{y}(t)$ przedstawiono we wspólnym układzie współrzędnych poniżej. (wszystkie stałe mają wartość 1).



Niestety, w tym miejscu przyjemne rachunki się kończą, a dalsza analiza tego ruchu wiąże się z raczej „brzydkimi” zależnościami. Na przykład przemieszczenie wyraża się poprzez:

$$y(t) = \int \dot{y}\, dt = \int \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \tanh\left(\sqrt{\alpha g} t\right) dt = \frac{1}{\alpha} \ln\left[\cosh\left(\sqrt{\alpha g} t\right)\right] + C$$

(czytelnik może sprawdzić, że faktycznie $\frac{1}{\alpha}$ ma wymiar długości). Powyższy wzór ukazuje, że będziemy w poważnych tarapatach, jeśli ktoś zapyta nas, np. o czas, w jakim siła oporu aerodynamicznego wykonała jakąś konkretną pracę. $W = \boldsymbol{F}_D \cdot \boldsymbol{d},$ gdzie $\boldsymbol{d}$ jest wektorem przemieszczenia. W naszym przypadku oczywiście $\boldsymbol{d} = y\boldsymbol{\hat{j}}$, natomiast $\boldsymbol{F}_D = -F_D\boldsymbol{\hat{j}}$ (założyliśmy oś y skierowaną zgodnie z kierunkiem ruchu, czyli „w dół”). Zatem $W = -F_D y$, ale zarówno F_D jak i y są funkcjami czasu! Praca naszej siły (również zależna od czasu) wynosi więc: $W(t) = \alpha m \dot{y}^2(t) \cdot \frac{1}{\alpha} \ln\left[\cosh\left(\sqrt{\alpha g} t\right)\right]$. Podstawiając za $\dot{y}(t)$ wcześniej wyliczone wyrażenie otrzymujemy następującą potworność. Zakładamy $y(0) = \frac{1}{\alpha}$, wtedy $C = 0$.

$$W(t) = \frac{mg}{\alpha} \tanh^2\left(\sqrt{\alpha g} t\right) \ln\left[\cosh\left(\sqrt{\alpha g} t\right)\right]$$

Jak zatem widać, na tak postawione pytanie nie jesteśmy w stanie odpowiedzieć, bowiem wyliczenie t z powyższej równości jest praktycznie niemożliwe. Skorzystać jednak możemy w tym celu z metod numerycznych. Jeżeli jednak praca, którą ma wykonać nasza siła jest znaczna (tak że jesteśmy pewni, iż do jej wykonania potrzeba dużo czasu), możemy skorzystać z następującego przybliżenia. Zauważmy, że skoro prędkość ciała dąży do wartości stałej, to funkcja opisująca jego przemieszczenie dla znacznych wartości argumentu t będzie *wyglądać* jak funkcja liniowa. Sprawdźmy dokąd zaprowadzi nas takie rozumowanie – rozpiszemy funkcję, z której bierzemy logarytm z definicji, tj. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\alpha g}t\right)\right] = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{e^{\sqrt{\alpha g}t}}{2} + \frac{e^{-\sqrt{\alpha g}t}}{2}\right)$$

Tutaj od razu widzimy, że dla względnie dużych wartości t, drugi składnik sumy pod logarytmem znika i całość upraszcza się do postaci:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\alpha g}t - \ln 2\right)$$

Podobnie rzecz ma się w przypadku $W(t)$, bowiem $\tanh^2\left(\sqrt{\alpha g}t\right) \to 1$, zatem otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} W(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(\sqrt{\alpha g}t - \ln 2\right)$$

$$\therefore t = \frac{W\sqrt{\alpha}}{mg^{3/2}} + \frac{\sqrt{g}\ln 2}{\sqrt{\alpha}}$$

Należy pamiętać, że jest to tylko i wyłącznie przybliżenie, które dla małych wartości czynnika $\sqrt{\alpha g}$ może być dalekie od prawdy.

Przykład. Rozważmy spadającą kulę żelazną o promieniu 0.5 m. Wówczas $C_D = 0{,}47$; $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$; $S = 0{,}785\ \mathrm{m^2}$; $m = \frac{4}{3}\rho_{\dot{z}}\pi(0{,}5\mathrm{m})^3 = 4122{,}82$ kg. Otrzymujemy $\alpha = 5{,}37 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^{-1}}$, a stąd $\sqrt{\alpha g} = 0{,}023\ \mathrm{s^{-1}}$. Aby stopić taką masę żelaza (już znajdującego się w odpowiedniej temperaturze) potrzebowalibyśmy dostarczyć $1{,}105 \cdot 10^9$J energii. Zatem czas potrzebny na stopienie żelaznej kuli podczas jej spadania, na skutek działania siły opory aerodynamicznego wyniósłby w przybliżeniu

$$t \approx 64\ \mathrm{s} + 296{,}12\ \mathrm{s} = 360{,}12\ \mathrm{s} \approx 6\ \mathrm{min}$$

A droga jaką w tym czasie przebyło ciało wynosi około 167 km. Wydaje się to być znaczną wysokością, podczas gdy w rzeczywistości jest to zaledwie 2,6% promienia Ziemi.

A. Bałaziński, 2019-06-07