Transformacja Laplace'a a zagadnienia fizyki klasycznej

Transformatą Laplace'a funkcji *f*(*t*) nazywamy funkcję *F*(*s*) określoną w poniższy sposób:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Kilka istotnych transformacji:

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(n)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$L\{ae^{bt}\} = a\int_0^\infty e^{(b-s)t}\, dt = \frac{a}{b-s}\int_0^\infty e^u\, du = \frac{a}{s-b}$$

$$L\{f'(t)\} = [f(t)e^{-st}]_0^\infty - s\int_0^\infty s^{-st} f(t)\, dt = sL\{f(t)\} - f(0)$$

Przy czym dla obliczenia pierwszej całki zastosowano podstawienie $u = st$, a dla drugiej $u = (b-s)t$. Należy pamiętać, że druga całka istnieje tylko gdy $s > b$.

Przykład zastosowania

Na dnie basenu, na głębokości h znajduje się ciało o gęstości mniejszej od gęstości wody, przy wynurzaniu porusza się w dodatnim kierunku osi *x*. Zadanie polega na wyznaczeniu funkcji *x*(*t*). Zakładamy, że $\dot{x}(0) = 0,$ oraz że na ciało działa siła oporu ośrodka wprost proporcjonalna do szybkości ciała.

Równanie ruchu ma postać $m\ddot{x} = F - mg - b\dot{x}$, gdzie b jest współczynnikiem proporcjonalności, o którym mowa w zadaniu, a F oznacza siłę wyporu. Niech $F - mg = \alpha$. Po zastosowaniu transformacji otrzymujemy:

$$m(s^2L\{x\} + hs) = \frac{\alpha}{s} - b(sL\{x\} = h)$$

$$L\{x\} = \frac{\alpha}{s^2(ms+b)} - \frac{hm}{ms+b}$$

Pierwszy czynnik w powyższej różnicy można zapisać w postaci $\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{ms+b}$, gdzie *A*, *B* i *C* są pewnymi stałymi. Oczywiście owe stałe nie mogą w żaden sposób zależeć od wartości *s*. Korzystając z tego faktu możemy te stałe znaleźć.

$$\alpha = As(ms+b) + B(ms+b) + Cs^2$$

Podstawiając kolejno $s = 0$ i $s = \frac{-b}{m}$ znajdujemy $B = \frac{\alpha}{b}$ oraz $C = \frac{\alpha m^2}{b^2}$. Podstawiając wyliczone wartości stałych do równania na α otrzymujemy

$$s^2\left(Am+\frac{\alpha m^2}{b^2}\right)=-s\left(b+\frac{\alpha m}{b}\right)$$

Podstawiając $s=1$ wyliczamy A.

$$A=-\frac{\alpha mb+\alpha m^2}{(m+b)b^2}=-\frac{\alpha m^2}{b^2}$$

$$\therefore\ \frac{\alpha}{s^2(ms+b)}=-\frac{\alpha m}{b^2 s}+\frac{\alpha}{bs^2}+\frac{\alpha m^2}{b^2(ms+b)}$$

Co jest postacią, do jakiej chcieliśmy doprowadzić pierwszy z czynników w wyrażeniu na $L\{x\}$. Korzystając z liniowości transformacji możemy obliczyć odwrotną transformację obu z czynników osobno.

$$L^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s^2(ms+b)}\right\}=-\frac{\alpha m}{b^2}+\frac{\alpha t}{b}+\frac{\alpha m}{b^2}\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{h}{s+b/m}\right\}=h\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy:

$$x\equiv x(t)=\frac{F_w-mg}{b}\left(t-\frac{m}{b}\right)+\left[\frac{(F_w-mg)m}{b^2}-h\right]\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$$

Po zastąpieniu odpowiednich stałych w tym wyrażeniu przez K_i gdzie $i=1,2,\ldots$ otrzymujemy postać uproszczoną

$$x(t)=K_1t+K_2\exp(-K_3t)+K_4.$$

Autor: A. Bałaziński