CIEKAWY PRZYKŁAD

Twierdzenie Leibniza o różniczkowaniu pod znakiem całki:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy}$$

Przykład zastosowania: $\int_0^1 \frac{t^3-1}{\ln t}dt = ?$

Zdefiniujmy następującą funkcję: $F(x) \equiv \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t}dt$; stąd widać, że $F(3) = \int_0^1 \frac{t^3-1}{\ln t}dt$, czyli $F(3)$ równe jest naszemu poszukiwanemu wyrażeniu. Obliczmy $\frac{dF}{dx}$:

$$\frac{dF}{dx} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{t^x-1}{\ln t}dt = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{t^x}{\ln t} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\ln t}\right)dt = \int_0^1 t^x dt$$

(bo $\frac{\partial}{\partial x}t^x = t^x \ln t$)

$$= \left.\frac{t^{x+1}}{x+1}\right|_0^1 = \frac{1}{x+1}$$

Aby otrzymać z powrotem F, wykonujemy działanie $F = \int \frac{dF}{dx}dx$. Zatem:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C$$

Zostaje teraz znaleźć C. Z definicji $F(x)$ wynika, że $F(0) = 0$. Uwzględniając ten fakt w powyższym wyrażeniu, otrzymujemy

$$\ln 1 + C = 0$$

Czyli $C = 0$. Zatem $\int_0^1 \frac{t^3-1}{\ln t}dt = F(3) = \ln 4$.