Wahadło jest to ciało zawieszone w jednorodnym polu grawitacyjnym w taki sposób, że może wykonywać drgania wokół poziomej osi nie przechodzącej przez środek ciężkości zawieszonego ciała. Przyspieszenie wahadła dane jest jako [i]

$$-g\sin\theta$$

poprzez porównanie powyższego przyspieszenia liniowego z przyspieszeniem kątowym α otrzymujemy tzw. równanie ruchu wahadła

$$-g\sin\theta = l\alpha$$

$$-g\sin\theta = l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Okres drgań wahadła nie zależy praktycznie od amplitudy, jeżeli wychylenie początkowe jest małe tj. dużo mniejsze od jednego radiana. Dla znacznych wychyleń okres ujawnia zależność od amplitudy, co wykażemy.

Przyjmijmy, że energia potencjalna grawitacji jest równa zeru w miejscu zawieszenia wahadła. Oznacza to, że wszystkie ciała znajdujące się poniżej poziomu tego punktu będą posiadały ujemną energię potencjalną. Całkowita energia wahadła jest równa sumie jego energii kinetycznej i potencjalnej, a z zasady zachowania energii jest równa początkowej energii potencjalnej (przyjmujemy, ze wahadło początkowo było w spoczynku, a jego wychylenie wynosiło ϕ_0.)

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0$$

po niewielkich przekształceniach otrzymujemy:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

okres drgań jest równy czasowi potrzebnemu do przebycia drogi od położenia wyjściowego do pionowego przemnożonej cztery razy

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

stosując tożsamość trygonometryczną

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

otrzymujemy

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

w celu rozwiązania zastosujmy podstawienie

$$\sin\epsilon = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}$$

stąd $\sin^2\frac{\varphi}{2} = \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\epsilon$ oraz

$$\frac{d}{d\varphi}\sin\epsilon = \frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}$$

$$\cos\epsilon = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}}\frac{d\varphi}{d\epsilon}$$

jeżeli różnicę sinusów kwadrat pod pierwiastkiem w naszej całce oznaczymy jako *A* otrzymamy

$$2A = 2\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2\sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}}\sin\frac{\varphi_0}{2} = 2\cos\epsilon\sin\frac{\varphi_0}{2} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\varphi}{d\epsilon} =$$
$$= \sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}\frac{d\varphi}{d\epsilon} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\epsilon}\frac{d\varphi}{d\epsilon}$$

stąd *T* można zapisać jako

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\epsilon}\frac{d\varphi}{d\epsilon}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\epsilon}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\epsilon}}$$

całka występująca w równaniu jest całką eliptyczną zupełną, którą zapisać można w postaci *K*(*k*)

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\epsilon}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\epsilon}}$$

jej rozwiązaniem jest następujący szereg potęgowy

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right]^2 k^{2n}$$

wstawiając tą wartość do wzoru na okres wahadła otrzymujemy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right]^2\sin^{2n}\frac{\varphi_0}{2}$$

rozwijając funkcje sinus do odpowiedniej potęgi w szeregi Maclaurina i aplikując je do sumy występującej w powyższym równaniu otrzymujemy szereg ($\frac{\varphi_0}{2}$ zastąpiono dla uproszczenia zapisu przez x)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right]^2 \sin^{2n} x =$$

$$= 1 + x^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^4\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\right] + x^6\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{2}{45} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{2}{3} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\right] + \cdots$$

po podstawieniu $\frac{\varphi_0}{2}$ pod x otrzymujemy wzór na okres wahadła niezależny od amplitudy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}{\varphi_0}^2 + \frac{11}{3072}{\varphi_0}^4 + \frac{173}{737280}{\varphi_0}^6 + \cdots\right)$$

Pierwszy wyraz tego rozwinięcia jest zgodny ze znanym wzorem elementarnym.

---

[i] Można tego łatwo dowieść analizując składowe siły grawitacji działającej na masę obciążnika.

Autor :

A. Bałaziński