ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA

Rozważmy następujący problem: dany jest zbiór trajektorii pewnego ciała. Jedna z ich jest tą, którą podążać będzie ciało w rzeczywistości. *Jak odróżnić tą właściwą, od pozostałych, możliwych tylko z matematycznego punktu widzenia?*

<u>Sposób Newtona</u>

Aby odpowiedzieć na to pytanie weźmy pod uwagę jeden z najprostszych przypadków, a mianowicie trajektorię[1] ciała rzuconego pionowo w górę w polu ciążenia. Wiemy, że ruch trwa przez czas T, a cząstka porusza się więc wzdłuż jednej tylko osi – niech osią tą będzie oś y. Na wykresie położenia od czasu, jej trajektoria będzie więc miała kształt paraboli. Odpowiedzi na zadane pytanie udzielił Newton: wykresem tym będzie $y(t)$ takie, że

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Całkując i obliczając stałe całkowania z warunków zadania ($y(0) = 0, y(T) = 0$)otrzymujemy parabolę o równaniu

$$y(t) = \frac{1}{2}gt(T - t)$$

Zastanówmy się jak inaczej można dojść do takiego rezultatu.

<u>Sposób Hamiltona</u>

Parabola (a w ogólności dowolna krzywa) składa się z sumy krótkich odcinków – im bardziej „podzielimy" krzywą, tym mniejsze będą odcinki. Ponieważ do dyspozycji mamy jedynie wykresy krzywych, a po „podzieleniu" budujące je krótkie odcinki, funkcja której zadaniem będzie rozróżnienie możliwych wykresów od rzeczywistego, musi zależeć wyłącznie od wartości położenia w danej chwili $y(t)$, nachylenia odcinka, czyli pochodnej $\dot{y}(t)$, i w końcu musi być proporcjonalna do czasu. Zatem funkcja będzie miała postać.

$$S = \sum L(y, \dot{y}, t)\, \Delta t$$

Przy $\Delta t \to 0$ przyjmuje postać

$$S = \int_0^T L(y, \dot{y}, t)\, dt$$

Zastanówmy się jaka dokładnie funkcja może kryć się za oznaczeniem L? Może to być związek wielkości $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$ i mgy, czyli energii kinetycznej i potencjalnej[2].Zaproponujmy, że tym związkiem jest różnica T i U.

Funkcję L nazywamy funkcją Lagrange'a (lagranżjanem)układu, a całkę S – działaniem układu

[1] Przez trajektorię rozumiemy drogę przebytą przez ciało w przestrzeni konfiguracyjnej w miarę upływu czasu. Wspomniana przestrzeń jest przestrzenią abstrakcyjną – w rzeczy samej podczas rzutu w górę obserwujemy jedynie ciało poruszające się wzdłuż jednej osi.
[2] Przyjmujemy oznaczenia: T i U kolejno dla energii kinetycznej i potencjalnej.

Funkcja S przyjmuje wówczas postać

$$S = \frac{1}{2} m \int_0^T \dot{y}^2 dt - mg \int_0^T y\, dt$$

Przypomnijmy, że zadaniem skonstruowanej funkcji jest wybranie spośród całej rodziny paraboli o równaniu ogólnym $y = kgt(T - t)$ tej, której wykres zaobserwujemy, w momencie rzutu pionowego w rzeczywistości, tzn. takiej, dla której $k = \frac{1}{2}$. Do wyrażenia na S podstawiamy w odpowiednie miejsca $y = kgt(T - t)$ oraz $\dot{y}^2 = g^2 k^2 (T^2 + 4t^2 - 4tT)$. W wyniku elementarnego całkowania mamy

$$S = \frac{1}{6} m g^2 T^3 (2k - 1)$$

Okazuje się, że funkcja ma ekstremum dla $k = \frac{1}{2}$. Identyczną wartość współczynnika mamy w równaniu paraboli wyliczonym z równania ruchu Newtona! Wysnuwamy więc odważną hipotezę: *W rzeczywistości cząstka porusza się miedzy dwoma położeniami w przestrzeni konfiguracyjnej, tak, że S przyjmuje wartość ekstremalną.* Wykażemy to za chwilę.

Różnica funkcji i różniczka funkcji

Różnicą funkcji nazywamy różnice jej wartości w dwu miejscach oddalonych od siebie o Δx.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Różniczka z kolei to podobne wyrażenie, lecz zmiana argumentu jest nieskończenie mała

$$df(x) = f(x + dx) - f(x) = \dot{f}(x)\, dx$$

Stwierdzamy, że $\Delta f \approx df$ oraz, że przybliżenie to jest tym lepsze im mniejsze Δx.

Podobnie wygląda sytuacja w przypadku funkcji kilu zmiennych (tu dwu)

$$\Delta f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

Zauważyć można, że jeśli Δx jest nieskończenie małe to w punkcie, w którym funkcja ma ekstremum zachodzi równość $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$. Interpretujemy to w sposób następujący: *w miejscu gdzie funkcja ma ekstremum, zmiana argumentu o wartość infinitezymalną nie zmienia wartości funkcji.*

Równanie Lagrange'a[3]

Korzystając z informacji z poprzedniego punktu możemy wywnioskować, że jeśli funkcja S przyjmowała wartość ekstremalną dla pewnego $q(t)$, to zmiana tej funkcji na $Q(t)$, nie zmieni działania jeśli

$$Q(t) - q(t) = \delta q(t)$$

[3] W tym miejscu zastąpimy współrzędną y zbiorem N współrzędnych uogólnionych charakteryzujących całkowicie położenie cząstki (o N stopniach swobody) w przestrzeni. Zbiór tych wartości oznaczymy krotko przez q. Celem uogólnienia zmienimy też granice całkowania – od t_1 do t_2.

Gdzie $\delta q(t)$ jest funkcja małą w całym przedziale czasu. Zasadę najmniejszego działania można więc zapisać w postaci

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) = 0$$

Stąd mamy (patrz poprzedni punkt)

$$\delta L = L\big(Q, \dot{Q}, t\big) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}$$

Ponieważ, każda trajektoria porównawcza przechodzi przez punkty początku i końca ruchu mamy dodatkowo

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

Kolejnym związkiem jest

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\,\delta q$$

W końcu mamy

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right) dt$$

Z drugiego wyrażenia pod całką otrzymujemy poprzez całkowanie przez części

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\; dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Pierwszy człon w różnicy znika na mocy warunku $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ więc zostaje

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\, \delta q\; dt = 0$$

Jest to możliwe tyko wówczas gdy

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Otrzymane równanie nazywamy równaniem Lagrange'a. Podstawiając tutaj różnicę energii kinetycznej i potencjalnej pod lagranżjan otrzymujemy

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = m\ddot{q}$$

Czyli równość będącą definicją siły. Zatem dowiedliśmy tezy o poprawności wcześniej sformułowanej zasady najmniejszego działania.

Autor: A. Bałaziński